(13/5/19)

Teorema (serie di Laurent) *Siano* $0 \le r < R \le +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \big| \, r < |z - z_0| < R\}$$

e f *una funzione analitica su* Ω*. Allora esistono e sono uniche funzioni* f_1 *e* f_2 *tali che*

(i) f_1 è *analitica in* $\{|z - z_0| < R\}$*;* f_2 è *analitica in* $\{|z - z_0| > r\}$ e $\lim_{z \to \infty} f_2(z) = 0$*;*

(ii) $f = f_1 + f_2$ *in* Ω*;*

(iii) *valgono le seguenti espansioni in serie:*

$$f_1(z) = \sum_{n \ge 0} a_n (z - z_0)^n \ , \qquad \forall \ |z - z_0| < R \tag{1}$$

$$f_2(z) = \sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n \ , \qquad \forall \ |z - z_0| > r \ , \tag{2}$$

dove, fissato $\rho \in (r, R)$*, gli* a_n*, per* $n \in \mathbb{Z}$*, sono definiti come*

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0 + \rho e^{it}\big)}{\rho^n \, e^{int}} \, dt \, ; \tag{3}$$

infatti, tale definizione non dipende da ρ*.*

(iv) *Per ogni* $r < \rho < R$

$$\sum_{n \ge 0} |a_n| \rho^n < +\infty \ , \qquad \sum_{n < 0} |a_n| \rho^n < +\infty \ , \tag{4}$$

e vale la seguente espansione in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \ . \tag{5}$$

Facciamo alcune osservazioni.

(a) f_2 *analitica in* $\{|z - z_0| > r\}$ è equivalente a

$$w \mapsto g(w) := f_2\Big(z_0 + \frac{1}{w}\Big) \tag{6}$$

analitica in $\{0 < |w| < 1/r\}$ e $\lim_{z \to \infty} f_2(z) = 0$ è equivalente a $\lim_{w \to 0} g(w) = 0$. Questo vuol dire che g *ha una singolarità eliminabile in* 0 *e che* $g(0) = 0$*, ossia,* f_2 *ha una singolarità eliminabile in* ∞ *con valore in* ∞ *uguale a 0.*

(b) Da (ii) e (iii) segue immediatamente l'espansione (5); infatti, in vista di (4), le due serie

$$\sum_{n \ge 0} a_n (z - z_0)^n \ , \qquad \sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n$$

convergono separatamente per ogni $|z - z_0| \le \rho < R$ e $|z - z_0| \ge \rho > r$, rispettivamente; dunque *la serie bilaterale in* (5) *converge uniformemente nell'anello*

$$\{r + \varepsilon \le |z - z_0| \le R - \varepsilon\}$$

per ogni $\varepsilon < (R - r)/2$.

(c) In vista delle formule (1), (2) e (3), l'unicità di f_1 e f_2 è ovvia; si noti, però, che ai fini dell'unicità la "normalizzazione" $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = 0$ è essenziale[1].

(d) Nel caso $r = 0$, z_0 è una singolarità isolata di f. In tal caso a_{-1} è *il residuo di f in z_0 e la parte singolare di f è, per definizione, f_2.*
Naturalmente, se z_0 è una singolarità eliminabile, le funzioni $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1}$ sono analitiche in $|\zeta - z_0| < R$ e quindi, per il teorema di Cauchy, tutti gli a_n con $n < 0$ sono nulli e l'espansione di Laurent si riduce alla formula di Taylor.

Dimostrazione del Teorema

- Sia $z \in \Omega$ e fissiamo ρ e ρ_0 tali che $r < \rho < |z - z_0| < \rho_0 < R$. Definiamo
$$\Omega' := \{\rho < |\zeta - z_0| < \rho_0\} \subseteq \Omega \ . \tag{7}$$
Denotiamo con C_ρ il cerchio orientato positivamente
$$C_\rho := \{\zeta = z_0 + \rho e^{it} \big| \, t \in [0, 2\pi]\} \ ,$$
e si noti che $C_{\rho_0} \sim C_\rho$ modulo Ω'. Allora, poiché $z \in \Omega'$, dalla formula generalizzata di Cauchy, segue che
$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_0} - C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad &= \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &=: \quad f_1(z) + f_2(z) \ . \end{aligned} \tag{8}$$
Poiché f è continua in Ω (essendo analitica), la funzione f_1 è analitica[2] sul dominio $\{|z - z_0| < \rho_0\}$, dove vale la seguente espansione in serie di Taylor[3]
$$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0) \ , \qquad \forall \ |z - z_0| < \rho_0 \ , \tag{9}$$
con gli a_n come in[4] (3) (con $n \in \mathbb{N}$), il che mostra la validità di (1).

- Si noti anche che la funzione
$$\zeta \in \Omega \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$
è, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, analitica su Ω e, quindi, per il teorema generalizzato di Cauchy, per ogni $\rho < \rho'$,
$$\int_{|\zeta - z_0| = \rho'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$
ossia, gli a_n in (3) *non dipendono* dalla scelta di $\rho \in (r, R)$.
Sia $\rho \in (r, R)$ e scegliamo $\rho < \bar\rho < R$. Dall'espressione esplicita in (3) con ρ sostituito da $\bar\rho$, segue che
$$|a_n| \leq \max_{|\zeta| = \bar\rho} |f(\zeta)| \ \frac{1}{\bar\rho^n}$$
da cui segue immediatamente la prima relazione in (4).
Analogamente, scegliendo $r < \bar\rho < \rho$ segue anche la seconda relazione in (4).

[1] Infatti, una seconda rappresentazione di f si otterrebbe ponendo $f_1 = \sum_{n>0} a_n (z - z_0)^n$ e $f_2 = \sum_{n \leq 0} a_n (z - z_0)^n$, ma in tal caso $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = a_0$, come è facile verificare.

[2] [A], Lemma 3, p. 121.

[3] [A], Theorem 3, p.179.

[4] [A], formula (24), p. 120.

- Per trovare l'espansione per f_2, poniamo

$$z = z_0 + \frac{1}{w} \ ,$$

e si noti che $|z - z_0| > \rho$ equivale a $|w| < 1/\rho$. Quindi,

$$\begin{aligned}
f_2\Big(z_0 + \frac{1}{w}\Big) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - \frac{1}{w}}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0 + \rho e^{it}\big)}{\rho e^{it} - \frac{1}{w}}\, i\rho e^{it} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{w\rho e^{it}}{1 - w\rho e^{it}}\, f\big(z_0 + \rho e^{it}\big) dt \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + \rho e^{it}\big)\rho^m\, e^{imt}\, dt\Big)\, w^m \\
&= \sum_{n<0} \Big(\int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0 + \rho e^{it}\big)}{\rho^n\, e^{int}}\, dt\Big)\, \frac{1}{w^n} \\
&=: \sum_{n<0} a_n (z - z_0)^n \ ,
\end{aligned}$$

l'uguaglianza con l'asterisco è giustificata dal fatto che $|w\rho e^{it}| = |w|\rho < 1$ e quindi la serie geometrica converge assolutamente (uniformemente in t) ed è, quindi, possibile scambiare la somma con l'integrale. Questo mostra anche la validità di (2). ∎